લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક

અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 9

PART A

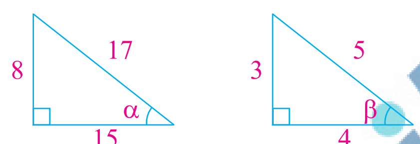
1. (D) **2.** (B) **3.** (C) **4.** (B) **5.** (D) **6.** (B) **7.** (B) **8.** (A) **9.** (B) **10.** (B) **11.** (A) **12.** (D) **13.** (B) **14.** (A) **15.** (A) **16.** (A) **17.** (C) **18.** (D) **19.** (C) **20.** (B) **21.** (A) **22.** (A) **23.** (C) **24.** (B) **25.** (D) **26.** (B) **27.** (D) **28.** (C) **29.** (A) **30.** (B) **31.** (A) **32.** (B) **33.** (D) **34.** (B) **35.** (C) **36.** (B,C) **37.** (A) **38.** (D) **39.** (C) **40.** (A) **41.** (B) **42.** (C) **43.** (A) **44.** (D) **45.** (A) **46.** (D) **47.** (C) **48.** (D) **49.** (C) **50.** (C)

PART B

વિભાગ-A

1.

ડા.બા. $= sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5}$



$\alpha = sin^{-1}\frac{8}{17} = cos^{-1}\frac{15}{17}$

$\therefore\ sin\,\alpha = \frac{8}{17},\ cos\,\alpha = \frac{15}{17}$

$\therefore\ tan\,\alpha = \frac{8}{15}$

$\beta = sin^{-1}\frac{3}{5} = cos^{-1}\frac{4}{5}$

$sin\,\beta = \frac{3}{5},\ cos\,\beta = \frac{4}{5}$

$tan\,\beta = \frac{3}{4}$

અહીં, $\alpha + \beta = ?$

$$tan\,(\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\,tan\,\beta}$$

$$= \frac{\frac{8}{15}+\frac{3}{4}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{32+45}{60}}{\frac{60-24}{60}}$$

$$tan\,(\alpha+\beta) = \frac{77}{36}$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta = tan^{-1}\left(\frac{77}{36}\right)$$

$$\therefore\ sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{77}{36}$$

2.

$tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

$x = a\,sin\,\theta$ ધારો.

$\therefore\ sin\theta = \frac{x}{a}$

$\therefore\ \theta = sin^{-1}\frac{x}{a},\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= tan^{-1}\left(\frac{a\,sin\theta}{\sqrt{a^2-a^2sin^2\theta}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\cancel{a}\,sin\theta}{\cancel{a}\sqrt{1-sin^2\theta}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}(tan\,\theta)$$

$$= \theta$$

$$= sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$|x| < a$

$\therefore\ -a < x < a$

$\therefore\ -1 < \frac{x}{a} < 1$

$\therefore\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < sin\,\theta < sin\,\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore\ cos\ \theta > 0$

3.

$sin\ x + sin\ y = tan\ xy$

x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(sin\ x + sin\ y) = \frac{d}{dx}(tan\ xy)$$

$$\therefore\ cos\ x + cos\ y\ \frac{dy}{dx} = sec^2\ xy\left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right)$$

$$\therefore\ cos\ x + cos\ y\ \frac{dy}{dx} = x\ sec^2\ xy\ \frac{dy}{dx} + y\ sec^2\ xy$$

$$\therefore \quad \cos y \frac{dy}{dx} - x \sec^2 xy \frac{dy}{dx} = y \sec^2 xy - \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} (\cos y - x \sec^2 xy) = y \sec^2 xy - \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \sec^2 xy - \cos x}{\cos y - x \sec^2 xy}$$

4.

➪ અહીં, $\tan \frac{x}{2} = t$ લેતાં,

$$\therefore \quad \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = dt$$

$$\therefore \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 1$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{3+3t^2+2-2t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+5}\,dt$$

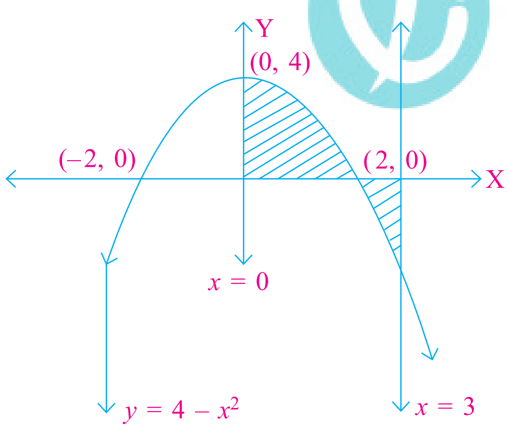
$$= 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+(\sqrt{5})^2}\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

5.



$$\mathrm{I} = \int_0^2 y\,dx + \left|\int_2^3 y\,dx\right|$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)\,dx + \left|\int_2^3 (4-x^2)\,dx\right|$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left|\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_2^3\right|$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + \left|\left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)\right|$$

$$= \frac{16}{3} + \left|3 - \frac{16}{3}\right|$$

$$= \frac{16}{3} + \left|\frac{9-16}{3}\right|$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{23}{3}$$

$$\mathrm{A} = |\mathrm{I}|$$

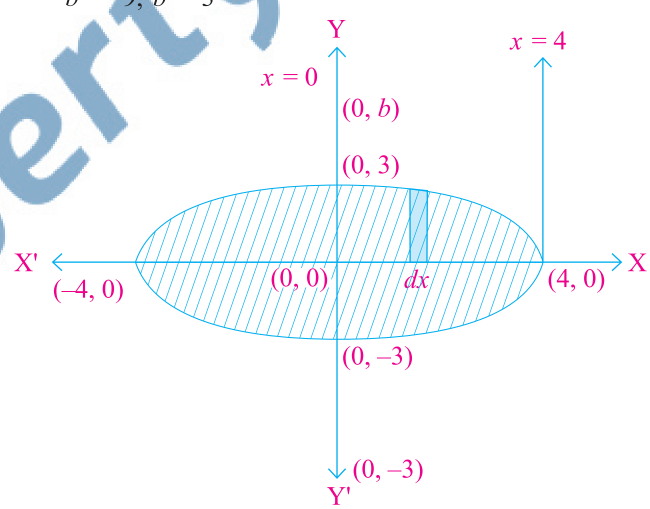
$= \frac{23}{3}$ ચો. એકમ

6.

➪ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16,\ a = 4\ (a > b)$

$b^2 = 9,\ b = 3$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ

વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ A = 4|I|

$$\mathrm{I} = \int_0^4 y\,dx$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore \quad y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\, sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{2}(0) + 8\, sin^{-1}(1)\right) - \left(0 + sin^{-1}(0)\right)\right]$$

$$I = \frac{3}{4}\left(8 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = 3\pi$$

હવે, $A = 4|I|$

$= 4|3\pi|$

$\therefore \quad A = 12\pi$ ચોરસ એકમ

7.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x} \qquad \dots (1)$$

આપેલ સમીકરણને $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ સાથે સરખાવતાં,

$P(x) = 3$

$Q(x) = e^{-2x}$

સંકલ્યકારક અવયવ; I.F. $= e^{\int P(x)\, dx}$

$= e^{\int 3\, dx}$

$= e^{3x}$

પરિણામ (1) ને e^{3x} વડે ગુણતાં,

$\therefore \quad e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3y\, e^{3x} = e^{3x}\, e^{-2x}$

$\therefore \quad e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3y\, e^{3x} = e^{x}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(y\, e^{3x}) = e^{x}$

$\therefore \quad y\, e^{3x} = \int e^{x}\, dx$

$\therefore \quad y\, e^{3x} = e^{x} + c$

$\therefore \quad y = e^{-2x} + ce^{-3x}$, જે માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે.

8.

સદિશ, $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ,

$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે, $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= 1 - 1 - 1$

$= -1, |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{3}$

$$cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

માટે, $cos\,\theta = -\frac{1}{3}$ મળે છે.

તેથી માંગેલ ખૂણો $\theta = cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ છે.

અથવા $\theta = \pi - cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ પણ લખાય.

9.

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

રેખા $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ને સમાંતર છે.

$\therefore$ રેખાની દિશા $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

રેખાનું સદિશ સમીકરણ,

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}, \ \lambda \in R$

$\therefore \quad \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}), \lambda \in R$

કાર્તેઝિય સમીકરણ : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}$

10.

ધારો કે રેખા X-અક્ષ, Y-અક્ષ, Z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે α, β, γ માપનાં ખૂણો બનાવે છે.

$\alpha = \beta = \gamma$

રેખાની દિક્કોસાઇન,

$cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$ છે.

$\therefore \quad cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$\therefore \quad 3\, cos^2\alpha = 1$

$\therefore \quad cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad cos\,\alpha = cos\,\beta = cos\,\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ રેખાની દિક્કોસાઇન $= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

11.

ધારો કે ઘટના K_1 જોડમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવેલ પ્રથમ પત્તું રાજા છે અને ઘટના K_2 જોડમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલું બીજું પત્તું રાજા છે તે દર્શાવે છે અને A જોડમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવેલ પત્તું એક્કો છે તે ઘટના દર્શાવે છે. સ્પષ્ટ છે કે આપણે $P(K_1K_2A)$ શોધવાની છે.

હવે, $P(K_1) = \frac{4}{52}$

વળી, યાદૃચ્છિક રીતે પ્રથમ પસંદ કરેલ પત્તું રાજા હોય એ શરતે $P(K_2 \mid K_1)$ એ યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ દ્વિતીય પત્તું રાજા હોય તેની સંભાવના છે.

હવે, $(52 - 1) = 51$ પત્તાંમાં ત્રણ રાજા છે.

આને કારણે, $P(K_2 \mid K_1) = \frac{3}{51}$

છેલ્લે, અગાઉથી પસંદ કરેલ બે પત્તાં રાજા હોય, તો $P(A \mid K_1K_2)$ એ બાકીનાં 50 પત્તાંમાં રહેલ 4 એક્કા પૈકીનું પસંદ કરેલ ત્રીજું પત્તું એક્કો હોય તેની સંભાવના છે.

આને કારણે, $P(A \mid K_1K_2) = \frac{4}{50}$

સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ પ્રમાણે,

આપણી પાસે,

$$P(K_1K_2A) = P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) \cdot P(A \mid K_1K_2)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50}$$
$$= \frac{2}{5525}$$

12.

➪ અહીં, $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$;

$$2P(A) = \frac{5}{13}$$
$$P(B) = \frac{5}{13}$$
$$\therefore \quad P(A) = \frac{5}{26}$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$
$$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{13}$$
$$= \frac{2}{13}$$
$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13}$$
$$= \frac{5}{26} + \frac{3}{13}$$
$$= \frac{11}{26}$$

વિભાગ-B

13.

➪ અહીં $[x]$ એ x થી નાના અથવા x ને સમાન તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક x છે.

બીજા શબ્દોમાં x થી અધિક નહિ તેવા તમામ પૂર્ણાંકોમાં સૌથી મોટો પૂર્ણાંક x છે.

$x_1 = 3.7$ અને $x_2 = 3.2$ લેતાં

$f(x_1) = f(3.7) = [3.7] = 3$ $f(x_2) = f(3.2) = [3.2] = 3$

અહીં $x_1 \neq x_2$ પરંતુ $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore$ વિધેય f એ એક-એક વિધેય નથી.

અહીં $f : R \to R, f(x) = [x]$ નો વિસ્તાર Z છે.

$\therefore R_f = Z \neq$ સહપ્રદેશ

$\therefore f$ એ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

ગણતરી : R

–2 –1 0 1 2

$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2$

$\therefore R_f = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\} = Z$

14.

➪ ટ્રસ્ટ પાસે કુલ ભંડોળ ₹ 30,000 છે.

ધારો કે ટ્રસ્ટ પ્રથમ બોન્ડ ₹ x નું રોકાણ કરે છે.

$\therefore$ ટ્રસ્ટે બીજા બોન્ડમાં કરેલું રોકાણ $(30000 - x)$ ₹

પ્રથમ બોન્ડ પ્રતિવર્ષ 5% વ્યાજ આપે છે અને

બીજો બોન્ડ પ્રતિવર્ષ 7% વ્યાજ આપે છે.

(a) વાર્ષિક ₹ 1,800 વ્યાજ મેળવવું છે.

$5\% = ₹ \frac{5}{100}$ $7\% = ₹ \frac{7}{100}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x & 30000 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{100} \\ \frac{7}{100} \end{bmatrix} = [1800]$$
$$\therefore \left[\frac{5}{100}x + \frac{7}{100}(30000 - x)\right] = [1800]$$
$$\therefore \left[\frac{5x + 210000 - 7x}{100}\right] = [1800]$$

$-2x + 210000 = 180000$

$\therefore 2x = 30000$

$\therefore x = 15000$

આમ, વાર્ષિક વ્યાજ ₹ 1,800 મેળવવા માટે પ્રથમ બોન્ડમાં ₹ 15,000 અને બીજા બોન્ડમાં

$30000 - 15000 =$ ₹ 15,000 રોકવા પડે.

(b) વાર્ષિક ₹ 2,000 વ્યાજ મેળવવું છે.

$$\therefore \begin{bmatrix} x & 30000 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{100} \\ \frac{7}{100} \end{bmatrix} = [2000]$$
$$\therefore \left[\frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x)\right] = [2000]$$
$$\therefore \left[\frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x)\right] = [2000]$$

$\therefore 5x + 210000 - 7x = 200000$

$210000 - 200000 = 2x$

$\therefore 2x = 10000$

$\therefore x =$ ₹ 5,000

આમ, વાર્ષિક વ્યાજ ₹ 2,000 મેળવવા માટે

પ્રથમ બોન્ડમાં ₹ 5,000 અને

બીજા બોન્ડમાં $= 30000 - 5000$

= ₹ 25,000નું રોકાણ કરવું પડે.

15.

➪ $$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

ડા.બા. $= A^2 - 5A + 7I$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

= જ.બા.

$A^2 - 5A + 7I = O$

બંને બાજુ A^{-1} વડે ગુણતાં,

$(AA)A^{-1} - 5AA^{-1} + 7IA^{-1} = OA^{-1}$

$\therefore A - 5I + 7A^{-1} = O$

$\therefore 7A^{-1} = 5I - A$

$$= 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 7A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

16.

ધારો કે, $x = sin\,\theta$

$\theta = sin^{-1}x$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore y = sin^{-1}\left(2sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta}\right)$

$= sin^{-1}(2sin\theta \cdot cos\theta)$

$\therefore y = sin^{-1}(sin2\theta)$

$\rightarrow$ અહીં, $\frac{-1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) < sin\theta < sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{-\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{-\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ... (1)

$y = sin^{-1}(sin2\theta)$

$= 2\theta$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$\rightarrow y = 2sin^{-1}x$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}sin^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

17.

$y = log(1+x) - \frac{2x}{2+x}, x > -1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} - \left[\frac{(2+x)(2)-(2x)}{(2+x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{1+x} - \left[\frac{4+2x-2x}{(2+x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{4+4x+x^2-4-4x}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

હવે, $x > -1 \Rightarrow x^2 \geq 0$

$\Rightarrow (1+x) > 0$

$\Rightarrow (2+x)^2 > 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \geq 0$

$\therefore x > -1$ પર f વધતું વિધેય છે.

18.

$A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ અને $C(11, 3, 7)$

A નો સ્થાનસદિશ $A(\vec{a}) = \hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$

B નો સ્થાનસદિશ $B(\vec{b}) = 5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}$

C નો સ્થાનસદિશ $C(\vec{c}) = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ = B નો સ્થાનસદિશ-Aનો સ્થાનસદિશ

$= 4\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

તથા $\overrightarrow{AC}$ = C નો સ્થાનસદિશ – Aનો સ્થાનસદિશ

$= 10\hat{i} + 5\hat{j} + 15\hat{k}$

અહીં, $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{AC}$ સમરેખ છે.

$\therefore$ A, B, C સમરેખ છે.

ધારો કે B એ $\overline{AC}$ નું A તરફથી $\lambda : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

B નો સ્થાન સદિશ

$$= \frac{\lambda(\text{Cનો સ્થાન સદિશ}) + (\text{Aનો સ્થાન સદિશ})}{\lambda + 1}$$

$$\therefore \quad 5\hat{i} - 2\hat{k} = \frac{\lambda(11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) + \hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}}{\lambda + 1}$$

$$\therefore \quad 5\hat{i} - 2\hat{k} = \frac{(11\lambda + 1)\hat{i}}{\lambda + 1} + \frac{(3\lambda - 2)\hat{j}}{\lambda + 1} + \frac{(7\lambda - 8)\hat{k}}{\lambda + 1}$$

$$\therefore \quad \frac{3\lambda - 2}{\lambda + 1} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

B એ $\overline{AC}$ નું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

19.

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$$

$$\therefore \text{L} : \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(-3\hat{i} + 2k\hat{j} + 2\hat{k}), \lambda \in R$$

$$\vec{b_1} = -3\hat{i} + 2k\hat{j} + 2\hat{k}$$

વળી, $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$

$$\therefore \text{M} : \vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(3k\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}), \mu \in R$$

$$\vec{b_2} = 3k\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$$

બંને રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

$$\therefore \quad \vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = 0$$

$$\therefore \quad (-3\hat{i} + 2k\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3k\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}) = 0$$

$$\therefore \quad -9k + 2k - 10 = 0$$

$$\therefore \quad -7k = 10$$

$$\therefore \quad k = \frac{-10}{7}$$

20.

$x + 2y \le 120$ ...(1)

$x + y \ge 60$ ...(2)

$x - 2y \ge 0$ ...(3)

$x \ge 0$

$y \ge 0$

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 5x + 10y$

$x + 2y = 120$ ... (i)

x	0	120
y	60	0

(0, 60) ×
(120, 0) ✓

$x + y = 60$ ... (ii)

x	0	60
y	60	0

(0, 60) ×
(60, 0) ✓

$x - 2y = 0$ ... (iii)

x	0	2
y	0	0

(0, 0) ×
(2, 1)

(i) અને (ii)નો ઉકેલ,

$$\begin{array}{r} x + 2y = 120 \\ x + y = 60 \\ - \quad - \quad - \\ \hline y = 60 \end{array} \quad (0, 60) \times$$

$\therefore x = 0$

(ii) અને (iii)નો ઉકેલ,

$$\begin{array}{r} x + y = 60 \\ x - 2y = 0 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 3y = 60 \end{array} \quad (40, 20) ✓$$

$\therefore y = 20$

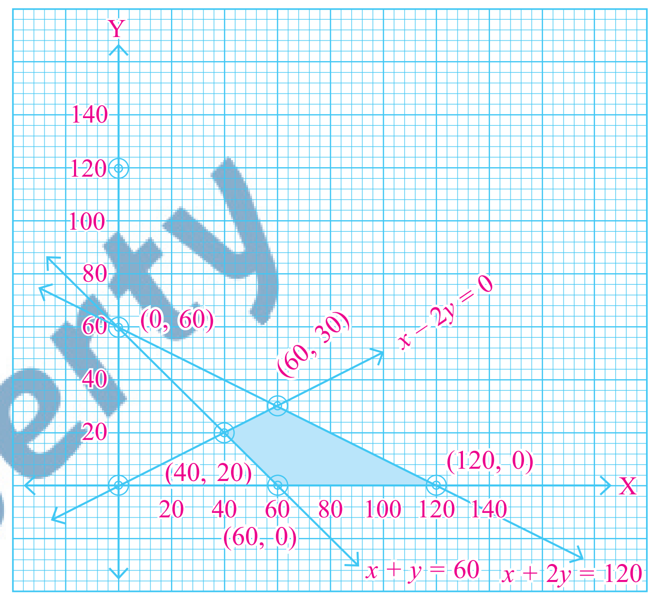
$\therefore x = 40$

(i) અને (iii)નો ઉકેલ,

$\therefore 4y = 120$

$\therefore y = 30$ $\qquad$ $\therefore x = 60$

(60, 30) ✓ $\qquad$ (0, 0) ×



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે જે સિમિત છે. શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (60, 0), (120, 0), (60, 30) અને (40, 20) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$Z = 5x + 10y$
(60, 30)	600 ← મહત્તમ
(40, 20)	400
(60, 0)	300 ← ન્યૂનતમ
(120, 0)	600 ← મહત્તમ

બિંદુઓ (120, 0) અને (60, 30) આગળ Zનું મહત્તમ મૂલ્ય 600 મળે તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય 300 બિંદુ (60, 0) આગળ મળે.

21.

છાત્રાલયમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓ 60% છે.

ઘટના A : વિદ્યાર્થી છાત્રાલયમાં રહેતો હોય

$$P(A) = \frac{60}{100}$$

ઘટના B : વિદ્યાર્થી છાત્રાલયમાં રહેતો ન હોય

$$P(B) = \frac{40}{100}$$

ઘટના E : વિદ્યાર્થી A_1 ગ્રેડ મેળવે.

$$P(E) = P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{20}{100}$$

$$= \frac{18}{100} + \frac{8}{100}$$

$$= \frac{26}{100}$$

$$P(A \mid E) = \frac{P(A) \cdot P(E|A)}{P(E)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{30}{100}}{\frac{26}{100}}$$

$$= \frac{9}{13}$$

વિભાગ-C

22.

A, B, C એ 2 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોવાથી અને CD – AB વ્યાખ્યાયિત હોવાથી D એ 2 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક થશે.

ધારો કે, $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ તથા CD – AB = O છે.

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

અથવા $\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

બંને શ્રેણિકના અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં, આપણને

$2a + 5c - 3 = 0$ .... (1)

$3a + 8c - 43 = 0$ .... (2)

$2b + 5d = 0$ .... (3)

અને $3b + 8d - 22 = 0$ મળે. .... (4)

(1) અને (2)ને ઉકેલતાં,

આપણને $a = -191$, $c = 77$ મળે.

(3) અને (4) ઉકેલતાં,

આપણને $b = -110$, $d = 44$ મળે.

માટે $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$.

23.

શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$\therefore AX = B$

જ્યાં, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\therefore X = A^{-1}B$

A^{-1} શોધવા માટે.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1(12 - 5) + 1(9 + 10) + 2(-3 - 8)$

$= 7 + 19 + 2(-11)$

$= 26 - 22$

$= 4 \neq 0$

$\therefore$ અનન્ય ઉકેલ મળે.

adj A મેળવવા માટે,

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$
$= 1(12 - 5)$
$= 7$

–1 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
$= (-1)(9 + 10)$
$= -19$

2 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
$= 1(-3 - 8)$
$= -11$

3 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$
$= (-1)(-3 + 2)$
$= 1$

4 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
$= 1(3 - 4)$
$= -1$

–5 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
$= (-1)(-1 + 2)$
$= -1$

2 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

$= 1(5 - 8)$

$= -3$

−1 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-5 - 6)$

$= 11$

3 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1(4 + 3)$

$= 7$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

➪ $X = A^{-1}B$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 49-5-36 \\ -133+5+132 \\ -77+5+84 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : $x = 2, y = 1, z = 3$

24. જો $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ હોય તો સાબિત કરો કે,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m + n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$$

➪ $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{mx} \cdot m + Be^{nx} \cdot n$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m \cdot Ae^{mx} + n \cdot Be^{nx} \quad .... (1)$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{mx} \cdot m^2 + Be^{nx} \cdot n^2$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 \cdot Ae^{mx} + n^2 \cdot Be^{nx} \quad .... (2)$$

ડા.બા. $= \frac{d^2y}{dx^2} - (m + n)\frac{dy}{dx} + mny$

$= [m^2 Ae^{mx} + n^2 Be^{nx}]$

$- (m + n)(m Ae^{mx} + n Be^{nx})$

$+ mn (Ae^{mx} + Be^{nx})$

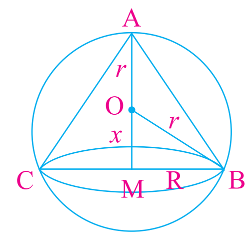
$= m^2 Ae^{mx} + n^2 Be^{nx} - m^2 Ae^{mx} - mn Be^{nx}$

$- mn Ae^{mx} - n^2 Be^{nx}$

$+ mn Ae^{mx} + mn Be^{nx}$

$= 0 =$ જ.બા.

25.



➪ અહીં, ગોલકની ત્રિજ્યા r છે.

ધારો કે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા R અને ઊંચાઈ h છે.

$\therefore$ MB = R

MA = $h = x + r$

આકૃતિ પરથી, ΔOBMમાં, $r^2 = x^2 + R^2$ ..... (1)

→ શંકુનું ઘનફળ (V) $= \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$= \frac{1}{3}(\pi)(r^2 - x^2)(r + x)$

($\because$ પરિણામ (1))

$= \frac{1}{3}(\pi)(r^3 + r^2x - x^2r - x^3)$

$\therefore\ f(x) = \frac{\pi}{3}(r^3 + r^2x - x^2r - x^3)$

$\therefore\ f'(x) = \frac{\pi}{3}(0 + r^2 - 2xr - 3x^2)$

$\therefore\ f''(x) = \frac{\pi}{3}(0 + 0 - 2r - 6x)$

$= \frac{-2\pi}{3}(r + 3x) < 0$

→ મહત્તમ ઘનફળ મેળવવા માટે,

$f'(x) = 0$

$\therefore\ \frac{\pi}{3}(r^2 - 2xr - 3x^2) = 0$

$\therefore\ r^2 - 2xr - 3x^2 = 0$

$\therefore\ r^2 - 3xr + xr - 3x^2 = 0$

$\therefore\ r(r - 3x) + x(r - 3x) = 0$

$\therefore\ (r - 3x)(x + r) = 0$

$\therefore\ r - 3x = 0$ | $x + r = 0$

$\therefore\ r = 3x$ | $r = -x$

$\therefore\ x = \frac{r}{3}$ | $x = -r$ શક્ય નથી. ($\because x > 0$)

$\rightarrow$ શંકુની ઊંચાઈ $(h) = x + r$

$$= r + \frac{r}{3}$$

$$\therefore \quad h = \frac{4r}{3}$$

26.

ધારો કે, $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

હવે ગુણધર્મ (6) પરથી,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$$ મળે.

$$\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$\cos x = t$ લેતાં,

$-\sin x \, dx = dt.$

જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 1$ અને

$x = \pi$ ત્યારે $t = -1$.

$$\therefore I = \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \pi \int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

(ગુણધર્મ (8)(i) પરથી $\frac{1}{1+t^2}$ યુગ્મ વિધેય છે.)

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1$$

$$= \pi[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0]$$

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

27.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(y^2+y+1)}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y^2+y+1} = -\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$\rightarrow$ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\therefore \int \frac{dy}{y^2+y+1} = -\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{y^2+2\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = -\int \frac{dx}{x^2+2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left[\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left[\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] + c$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left[\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right] = -\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] + c$$

$$\therefore \tan^{-1}\left[\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$\therefore \tan^{-1}\left[\frac{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$\therefore \frac{(2y+1)+(2x+1)}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{3-(2y+1)(2x+1)} = \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right]$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}\,[2x+2y+2]}{3-(4xy+2y+2x+1)} = \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right]$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}\,(x+y+1)}{2-2x-2y-4xy} = \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right]$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}\,(x+y+1)}{2(1-x-y-2xy)} = \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right]$$

$$\therefore (x+y+1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right] (1-x-y-2xy)$$

$$\therefore (x+y+1) = A(1-x-y-2xy)$$

જ્યાં, $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left[\frac{\sqrt{3}}{2} c\right]$ સ્વૈર અચળ